ПРАВИТЕЛЬСТВО САНКТ – ПЕТЕРБУРГА КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение ГБОУ СОШ №292.

Фрунзенского административного района г. Санкт – Петербурга

Адрес: Будапештская улица, дом 42/6

Телефон/факс (812) 360-7768, (812) 360-8806, e-mail: info@school292.spb.ru

ПРОЕКТНО – ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

**ТЕМА ПРОЕКТА**

СИММЕТРИЯ, ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ И ИХ ЗВЕЗДЧАТЫЕ ФОРМЫ

Руководитель проекта

Ф.И.О. Афанасьева Виктория Викторовна

Должность: учитель математики

Работу выполнила

Ф.И.О. Булгакова Анастасия Олеговна

Класс 11Б

г. Санкт – Петербург

03.03.2017

СИММЕТРИЯ, ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ И ИХ ЗВЕЗДЧАТЫЕ ФОРМЫ

**Правильные многогранники**

**Многогранником называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых гранями.**

**Многоугольником называется простая, плоская, замкнутая ломаная  
(простая=без самопересечений)**

Виды многогранников:

1. Выпуклые
2. Невыпуклые

**\***Многогранник называется ***выпуклым***, если ʗ (для любых точек А и В фигуры F отрезок AB содержится в F).

**\***Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если выполнены 3 условия:

1. Все его грани-равные правильные многоугольники
2. В каждой вершине сходится одинаковое количество граней
3. Все двугранные углы равны.

***ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА***

**Для любого выпуклого многогранника выполнено:**

**В-Р+Г=2, где В- число вершин  
 Р-число ребер**

**Г-число граней**

Доказательство:

Рассмотрим точку внутри многогранника и сферу с центром в этой точке, содержащую многогранник. Спроектируем вершины и ребра многогранника на сферу. Получим точки и дуги окружностей. Это множество назовем сетью на сфере: точки – вершины сети, части (дуги) окружностей – ребра сети.

Число В, Р, Г многогранника равно соответствующему числу В1, Р1, Г1 на сфере. В=В1, Р=Р1, Г=Г1 (Г1-область на сфере), тогда В-Р+Г=В1-Р1+Г1.

Докажем теорему Эйлера для сети, используя переход к более простым сетям путем отбрасывания ребер сети на сфере, выходящих из одной точки.  
К каждому ребру примыкает 2 области. При последовательном отбрасывании ребер, выходящих из точки А (за исключением последнего), число ребер будет каждый раз уменьшаться на 1, каждый раз на 1 будет уменьшаться и число областей.

В-Р+Г=В1-Р1+Г1=В1-(Р1-1)+(Г1-1)

При отбрасывании последнего ребра, выходящего из точки А, вместе с точкой А количество ребер уменьшится на 1, как и количество вершин.

В-Р+Г=1-0+1=2, **что и требовалось доказать.  
Замечание:** Теорема Эйлера справедлива и для более общего класса многогранников, например для звездчатых.

***ТЕОРЕМА КОШИ: Существует ровно 5 правильных многогранников.***

Доказательство двумя способами.

**I способ (доказательство Евклида)**:

Будем анализировать вид каждой грани и число граней, сходящихся в одной вершине.   
1. Грани – правильные треугольники  
n=3 -правильный тетраэдр

n=4 -октаэдр

n=5 -икосаэдр

n6 не существует, так как **- плоскость** 2. Грани- квадраты   
n=3 -куб

n4 не существует, так как  **невозможно.**

3.Грань - правильный пятиугольник

n=3 -додекаэдр

n4 не существует, так как  **невозможно.**

4.Гранью НЕ может быть правильный шестиугольник, семиугольник и так далее, так как их углы будут больше либо равны 120 градусам, а значит число граней, сходящихся в вершине многогранника, может равняться только двум, что невозможно.

**I I способ:**

Пусть у многогранника каждая грань содержит **m** ребер, в каждой вершине сходятся **n** ребер. Вычислим число ребер многогранника двумя способами:

**1 способ:** Вычислим умножением числа граней на число ребер в грани

**2 способ:** Вычислим умножением числа вершин на число ребер, выходящих из вершины, то есть:

=> Г= ; В=

Так как многогранник выпуклый по определению, то для него выполнена теорема Эйлера:

В-Р+Г=2

– Р+= 2

+= 2+Р

+=+

Так как Р, то , +

Произведем две оценки для m и n:   
**1)** Ни m, ни n не могут быть одновременно больше или равны 4, то есть:  
 решений нет (так как, если допустить противное, , следовательно + –**противоречие!)**

**2)** Ни одно из чисел m и n не может быть больше либо равно 6.

m – решений нет

n – решений нет

(В противном случае, если m, то n=3; тогда +

+ **– противоречие!)**

Используя эти условия и уравнения:

, получим **ровно 5** случаев для решения системы в целых числах:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **m** | **n** | **P** | **В** | **Г** | **Названия** |
| **1** | **3** | **3** | **6** | **4** | **4** | **Тетраэдр**C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\tetraedr.png |
| **2** | **4** | **3** | **12** | **8** | **6** | **ГексаэдрC:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\2000px-Hexahedron.svg.png** |
| **3** | **3** | **4** | **12** | **6** | **8** | **ОктаэдрC:\Users\РиК\Desktop\144px-Zeroth_stellation_of_octahedron.png** |
| **4** | **5** | **3** | **30** | **20** | **12** | **ДодекаэдрC:\Users\РиК\Desktop\Zeroth_stellation_of_dodecahedron.png** |
| **5** | **3** | **5** | **30** | **12** | **20** | **ИкосаэдрC:\Users\РиК\Desktop\144px-Zeroth_stellation_of_icosahedron.png** |

**Симметрия**

**Симметрией фигуры** называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует её нетождественное движение, совмещающее её саму с собой.

Слово «симметрия» происходит от греческого и означает «соразмерность».

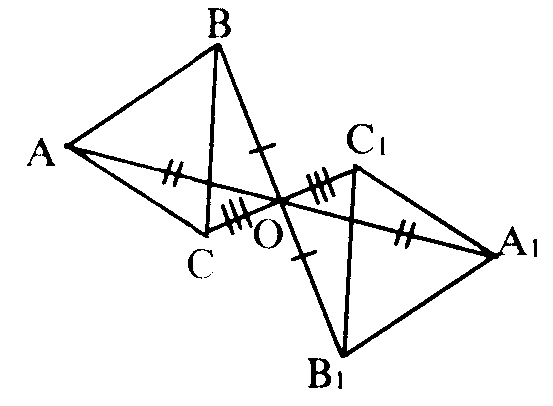
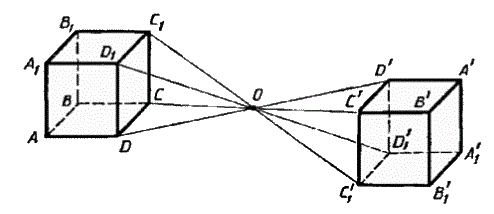
Симметрия играет огромную роль в искусстве, особенно ясную в орнаментах и архитектуре. Учение о симметрии составляет важную и обширную часть геометрии, особенно в той ее части, которая касается симметрии кристаллов. Здесь она включается в науку, называемую геометрической кристаллографией. Помимо кристаллов, симметрия в природе наблюдается у живых организмов. У растений наблюдается симметрия цветов, симметрия расположения листьев, в частности винтовая. У животных особенно примечательны в этом смысле морские звезды. В последнее время общее учение о симметрии приобрело большое значение в физике, с ним связаны основные законы природы.

Симметрия фигуры тем больше, чем больше движений, которые совмещают ее саму с собой.

**Центральная симметрия**

*Точки А и В называются центрально симметричными относительно точки О, если О является серединой отрезка АВ.*

1. Центральная симметрия меняет направление на противоположное, так как центральная симметрия- движение.
2. Преобразование, обратное центральной симметрии, является тоже центральной симметрией



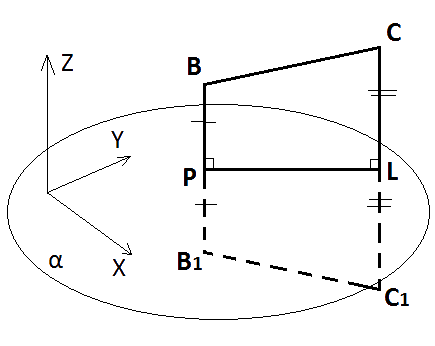
**Зеркальная симметрия**

***Зеркальная симметрия- симметрия относительно плоскости.***

*Отображение пространства на себя, при котором каждой точке соответствует точка, симметричная относительно данной плоскости, называется* ***зеркальной симметрией****.*

Точки А и А1 называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок АА1 перпендикулярен α и делится плоскостью пополам.

Зеркальная симметрия- движение, меняющее направление на противоположное



**Симметрия правильных многогранников**

Правильные многогранники характеризуются тем, что они самые симметричные из всех многогранников.

Это означает, что если мы возьмем а правильном многограннике какую-нибудь вершину А, подходящее к ней ребро а и грань α, подходящую к этому ребру, и еще любой такой же набор А1, а1, α1, то существует такое совмещение многогранника, которое вершину А отображает на А1, ребро а- на а1, грань α на α1.

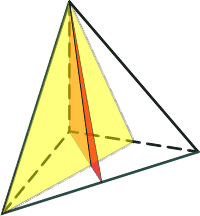
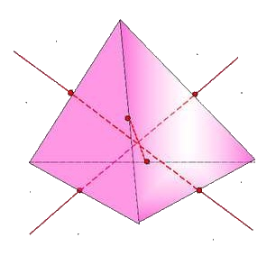
Докажем это. Так как любые две грани правильного многоугольника равны, то существует движение, которое одну из них переведет в другую. В результате его (поскольку двугранные углы равны) многогранник самосовместился или перейдет во многогранник, симметричный исходному относительно плоской второй грани. В последнем случае отражение в плоскости этой грани завершает процесс самосовмещения правильного многогранника.

Замечание: С другой стороны, многогранники, обладающие этим свойством, будут правильными, так как у них равны все ребра, все плоские и двугранные углы, а потому они выпуклы и все их грани – равные правильные многоугольники.

**Элементы симметрии тетраэдра**

Тетраэдр имеет **3 оси симметрии**, которые проходят через середины скрещивающихся ребер.

Тетраэдр имеет **6 плоскостей симметрии**, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра перпендикулярно скрещивающемуся с ним ребру.

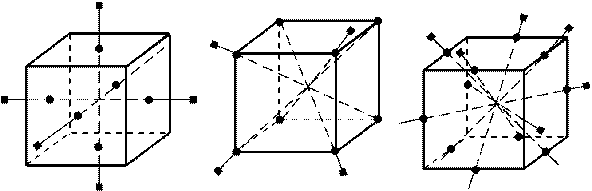
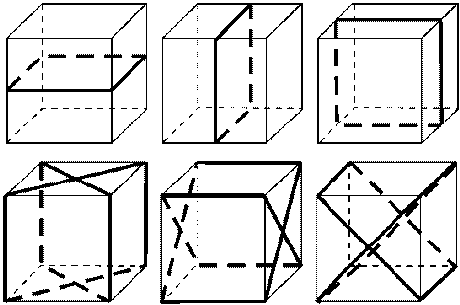


**Элементы симметрии куба (гексаэдра)**

**Ось симметрии** куба может проходить либо через середины параллельных ребер, не принадлежащих одной грани, либо через точку пересечения диагоналей противоположных граней.

**Центром симметрии** куба является точка пересечения его диагоналей. Через него проходят 9 **осей симметрии.**

**Плоскостей симметрии** у куба также 9 и проходят они либо через противоположные ребра (таковых плоскостей 6), либо через середины противоположных ребер (таких 3).

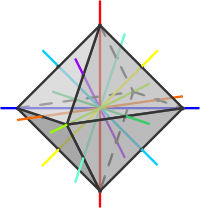
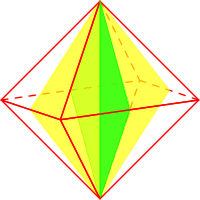
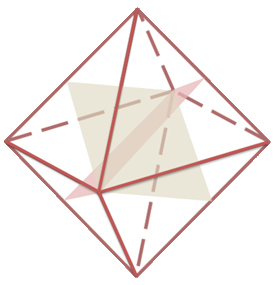


**Элементы симметрии октаэдра**

**3** из **9 осей симметрии** октаэдра проходят через противоположные вершины, 6 – из середины ребер.

**Центр симметрии** октаэдра – точка пересечения его **осей симметрии**.

**6 плоскостей симметрии** проходят через 2 вершины, не принадлежащие одной грани, и середины противоположных ребер

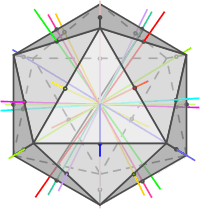
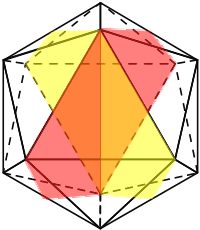


**Элементы симметрии икосаэдра**

Икосаэдр имеет **15 осей симметрии**, каждая из которых проходит через середины противоположных параллельных ребер.

Точка пересечения всех **осей симметрии** икосаэдра является его **центром симметрии**.

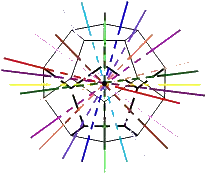
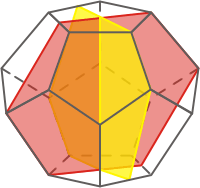
**Плоскостей симметрии** также **15.** Они проходят через четыре вершины, лежащие в одной плоскости, и середины противолежащих параллельных ребер.

**** ****

**Элементы симметрии додекаэдра**

Додекаэдр имеет **центр симметрии** и **15 осей симметрии**. Каждая из осей проходит через середины противолежащих параллельных ребер.

Также додекаэдр имеет **15 плоскостей симметрии**. Любая из плоскостей симметрии проходит в каждой грани через вершину и середину противоположного ребра

**Двойственность**

**Многогранник, двойственный к заданному многограннику**- многогранник, у которого каждой грани исходного многогранника соответствует вершина двойственного, каждой вершине исходного- грань двойственного и каждому ребру исходного-ребро двойственного.

1. Вершины: находятся в центре граней исходного многогранника
2. Ребра: между вершинами проводится ребро, если соответствующие грани имеют общее ребро

|  |  |
| --- | --- |
| **Многогранник** | **Двойственный** |
| Тетраэдр | Тетраэдр |
| Гексаэдр | Октаэдр |
| Икосаэдр | Додекаэдр |

**Двойственность- также симметрия для правильных многогранников**

**Каскады**

В любой правильный многогранник можно вписать все остальные правильные многогранники. Последовательно вписывая друг в друга правильные многогранники, получим так называемое **каскадное вписывание**.

В качестве первого можно взять один из пяти правильных многогранников. В качестве второго, вписанного в него многогранника, можно взять любой из оставшихся многогранников, в качестве третьего-любой из оставшихся трех, затем любой из оставшихся двух и пятым будет один оставшийся многогранник. Таким образом, число возможных каскадов из различных правильных многогранников равно **5!=120**.  
**Некоторые виды каскадов:**

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\0009-008-Kub-i-dodekaedr.png | Вписанный в куб додекаэдр |
| Октаэдр, вписанный в правильный тетраэдр | C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\октаэдр в тетраэдре.png |
| C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\0004-002-Kub-i-р.png | Куб, вписанный в октаэдр |
| Куб, вписанный в октаэдр, вписанный в правильный тетраэдр | C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\img33.jpg |
| C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\0016-016-Dodekaedr-i-tetraedr.jpg | Правильный тетраэдр, вписанный в икосаэдр, вписанный в додекаэдр |
| Вписанный в куб икосаэдр | C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\0007-005-Ikosaedr.png |
| C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\0_88879c1a_5ff0c253_L.png | Вписанный в додекаэдр икосаэдр |
| Вписанный в икосаэдр додекаэдр | C:\Users\РиК\Desktop\ПРОЕКТ\картинки\0_89c1a_5ff0c253_L.jpg |

**Звездчатые формы правильных многогранников**

**Звёздчатой формой многогранника** называется многогранник, полученный путём продления граней данного многогранника через рёбра до их следующего пересечения с другими гранями по новым рёбрам.

**Правильными звёздчатыми многогранниками** называются звёздчатые многогранники, гранями которых являются одинаковые правильные или звёздчатые многоугольники. В отличие от пяти классических правильных многогранников, данные многогранники не являются выпуклыми телами.

Звездчатые многогранники благодаря своим необычным свойствам симметрии исследуются с древнейших времен. Также эти формы многогранников широко используются в декоративном искусстве, используются для созданий всевозможных украшений.

Виды звездчатых многогранников:

Тетраэдр и гексаэдр (куб) не имеют звёздчатых форм, так как их грани при продлении через рёбра более не пересекаются.

1. **Звёздчатый октаэдр Кеплера** 

Существует только одна звёздчатая форма октаэдра, так как дальнейшее

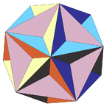
продление граней октаэдра не приводит к созданию нового многогранника.

Звёздчатый октаэдр был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти 100 лет переоткрыт И. Кеплером и назван им Stella octangula — звезда восьмиугольная. Отсюда эта форма имеет и второе название: «stella octangula Кеплера»; по сути она является соединением двух тетраэдров.

1. **Звездчатые формы додекаэдра **

Додекаэдр имеет 3 звёздчатые формы: малый звёздчатый додекаэдр, большой додекаэдр, большой звёздчатый додекаэдр (звёздчатый большой додекаэдр, завершающая форма). В отличие от октаэдра, любая из звёздчатых форм додекаэдра не является соединением платоновых тел, а образует новый многогранник.

 **малый звёздчатый додекаэдр**

**** **большой додекаэдр**

**** **большой звёздчатый додекаэдр**

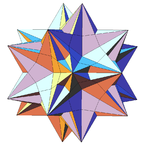
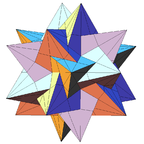
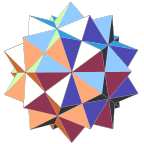
У большого додекаэдра гранями являются пятиугольники, которые сходятся по пять в каждой из вершин. У малого звёздчатого и большого звёздчатого додекаэдров грани — пятиконечные звёзды, которые в первом случае сходятся по 5, а во втором по 3 грани в одной вершине.

Вершины большого звёздчатого додекаэдра совпадают с вершинами описанного додекаэдра.

1. **Звёздчатые формы икосаэдра**

Икосаэдр имеет 59 звёздчатых форм, из которых 32 обладают полной, а 27 — неполной икосаэдральной симметрией, что было доказано Коксетером совместно с Дювалем, Флэзером и Петри c применением правил ограничения, установленных Дж. Миллером. Одна из этих звёздчатых форм (20-я, модель 41 по Веннинджеру), называемая большим икосаэдром, является одним из четырёх правильных звёздчатых многогранников Кеплера — Пуансо. Его гранями являются правильные треугольники, которые сходятся в каждой вершине по пять; это свойство является у большого икосаэдра общим с икосаэдром. 

Среди звёздчатых форм также имеются: соединение пяти октаэдров, соединение пяти тетраэдров, соединение десяти тетраэдров. Первая звёздчатая форма — малый триамбический икосаэдр.



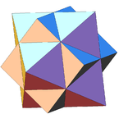
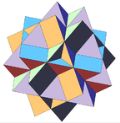
Если каждую из граней продолжить неограниченно, то тело будет окружено большим многообразием отсеков — частей пространства, ограниченных плоскостями граней. Все звёздчатые формы икосаэдра можно получить добавлением к исходному телу таких отсеков. Не считая самого икосаэдра, продолжения его граней отделяют от пространства 20 + 30 + 60 + 20 + 60 + 120 + 12 + 30 + 60 + 60 = 472 отсека десяти различных форм и размеров. Большой икосаэдр состоит из всех этих кусков, за исключением последних шестидесяти. Следующая звёздчатая форма — завершающая.

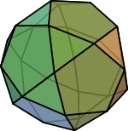
**Полуправильные многогранники и их звездчатые формы**

Полуправильные звёздчатые многогранники — это звёздчатые многогранники, гранями которых являются правильные или звёздчатые многоугольники, но не обязательно одинаковые. При этом строение всех вершин должно быть одинаковым.

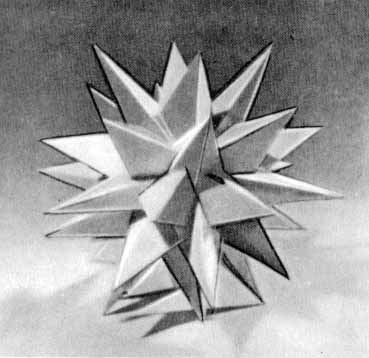
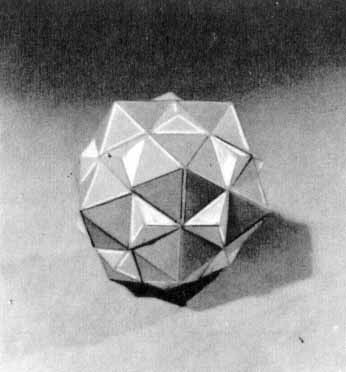
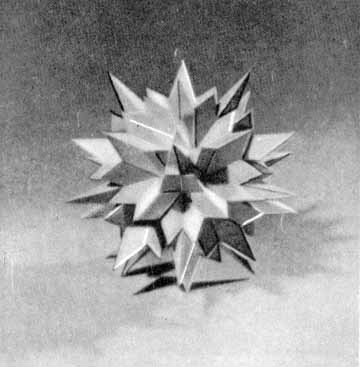
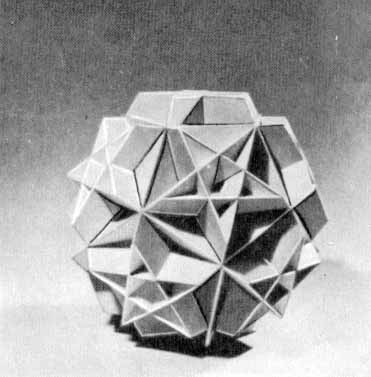
**1)** **Звездчатые формы кубооктаэдра** 

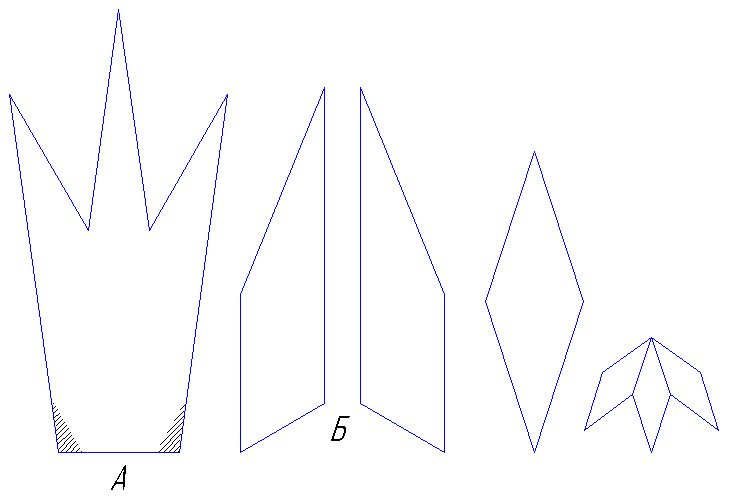
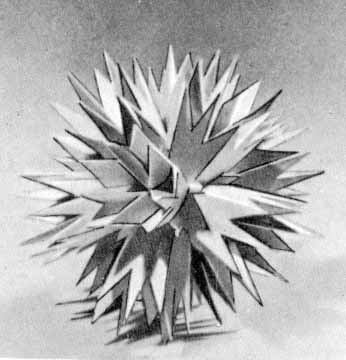
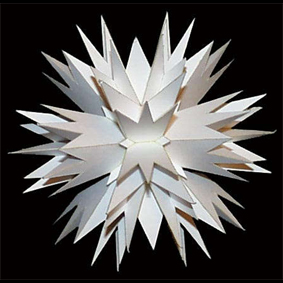
Кубооктаэдр имеет 4 звёздчатые формы, удовлетворяющие ограничениям, введённым Миллером. Первая из них является соединением куба и октаэдра.

**2)Звёздчатые формы икосододекаэдра** 

Икосододекаэдр имеет 32 грани, из которых 12 являются правильными пятиугольными гранями, а остальные 20 — правильными треугольниками. Икосододекаэдр имеет множество звёздчатых форм, первая из которых есть соединение икосаэдра и додекаэдра.



**Девятнадцатая завершающая звездчатая форма икосододекаэдра** Завершающие звёздчатые формы любых многогранников всегда вызывают особый интерес. Перед нами завершающая звёздчатая форма икосододекаэдра. Не правда ли, чем-то она напоминает вспышку фейерверка, когда из одной точки в разных направлениях разлетаются огненные звёзды и путь их ясно виден на фоне ночного неба. Но никакой фейерверк не сможет передать удивительной упорядоченности и математической точности этого многогранника, лучи которого чётко группируются в 12 заметных «короноидальных» групп.

**Изготовление модели:**

Начнём с изготовления боковой оболочки «короны» из пяти заготовок, обозначенных буквой А. В нижнем основании «короны» будет лежать правильный пятиугольник, а края вверху окажутся весьма зазубренными. Теперь склейте пять пар трапеций, обозначенных буквой Б. Каждая пара таких энантиоморфных трапеций соединяется наклейками нижних коротких рёбер, отходящих от срединного тупого угла. Соедините все пять пар вместе рёбрами, которые у них склеены. У вас в руках окажется кольцеобразная гармошка. Теперь к рёбрам, исходящим из верхней склеенной точки — вершины тупого угла, — подклейте пять заготовок в форме ромба. (При этом каждая ромбическая грань должна связывать между собой рёбра соседних пар трапеций.) Так вы получите внутреннюю часть «короны». Для того чтобы поставить её на место, приклейте края ромбов, используя зажимы для соединения наклеек внутри острых двугранных углов. После этого приступайте к подклейке остальных рёбер к средним выступам каждой стороны «короны». (Придерживайте пальцами склеиваемые части до тех пор. пока клей полностью не подсохнет.) Всю работу выполняйте последовательно, склеивая рёбра одно за другим.

Полученная «корона» — только одна часть модели, а всего потребуется 12 частей. Соединяйте их обычным способом, как грани додекаэдра. Наконец, наклейте маленькие вершины большого звёздчатого додекаэдра, соединив их предварительно в трёхгранную часть. Лучше всего сохранить на них наклейки и, нанеся клей, просто прижать их к месту соединения трёх «корон».

Штриховка на рисунке А показывает части боковой поверхности «корон». закрываемые трёхгранными отсеками. Изготовление модели сопряжено с очень кропотливой работой. Что касается раскраски, то она может совпадать с обычной икосаэдральной раскраской, а выступающие части граней большого звёздчатого додекаэдра можно сделать белыми (Б).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

*Изучение таких простых многогранников как правильные дает очень большой спектр задач, которые можно решать в этой теме, в том числе каскады. А если изучать звездчатые формы, то можно, во-первых, делать различные проекты по созданию звездчатых форм многогранника, изучать характеристики звездчатых форм, проверять, выполняется ли в них теорема Эйлера, а во-вторых, это просто хорошо расширяет кругозор по математике.*